Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele IX-XII
25 noiembrie 2012
Soluţii
RUNDA a III-a

Problema 1. Pe laturile $[AB],[BC],[AC]$ ale triunghiului $\triangle ABC$, se consideră punctele $M, N,$ respectiv P, astfel încât $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{5};\frac{NC}{NB}=\frac{1}{4}$ şi $\frac{PC}{PA}=\frac{1}{6}$. Să se afle rapoartele $\frac{GA}{GN}$ şi $\frac{GM}{GP}$, unde $G\in AN\cap MP$.

Soluţie: Notăm

$\frac{NG}{GA}=x;\frac{MG}{GP}=y.$

$\overrightarrow{AG}=\frac{y}{y+1}\cdot\overrightarrow{AP}+\frac{1}{y+1}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{y}{y+1}\cdot\frac{6}{7}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{y+1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AB}\ (1).$

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{x+1}\cdot\overrightarrow{AN}=\frac{1}{x+1}\cdot\frac{4}{5}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{AB}\ (2);$

$$Din\ (1)\text{şi}\ (2)\Rightarrow\begin{cases}\frac{6y}{7\cdot(y+1)}=\frac{1}{x+1}\cdot\frac{4}{5}\\ \frac{1}{6\cdot(y+1)}=\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{5}\end{cases}\Rightarrow y=\frac{7}{9};x=\frac{17}{15}$$

Răspuns: $\frac{GA}{GN}=\frac{15}{17};\frac{GM}{GP}=\frac{7}{9}.$

Problema 2. Să se determine numărul submulţimilor mulţimii $\{1,2,3,4,...,2\cdot n\}$ în care ecuaţia $x+y=2n+1$ nu are soluţie .

Soluţie: Pentru a construi o submulţime cu proprietatea din enunţ, trebuie să ne asigurăm că pentru fiecare $x\in\{1,2,3,...,n\}$, numerele x şi $2n+1-x$ nu aparţin simultan submulţimii.

Putem pune în submulţimea respectivă pe x, pe $2n+1-x$ sau pe nici unul, deci avem trei opţiuni pentru fiecare x.

In concluzie, există 3^n submulţimi cu proprietatea din enunţul problemei.

Răspuns: 3^n

Problema 3. Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x+1}{x+2}.$

Să se calculeze $f_n=\underbrace{f\circ f\circ f\circ...\circ f}_{de\ n\ ori},n\in\mathbb{N}^*.$

Soluţie: Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.

Avem $f_n(x)=\frac{a_n\cdot x+b_n}{c_n\cdot x+d_n};\ A^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{pmatrix};$

Folosim relaţia lui Cayley-Hamilton, obţinem:

$A^{n+2}-4\cdot A^{n+1}+3\cdot A^n=O_n$

$a_{n+2}-4\cdot a_{n+1}+3\cdot a_n=0,$

$a_n=\alpha\cdot 3^r+\beta, a_1=2, a_2=5;$

$\begin{cases}3\cdot\alpha+\beta=2\\9\cdot\alpha+\beta=5\end{cases}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2},\beta=\frac{1}{2};$

$a_n=\frac{3^n+1}{2}; b_n=c_n=\frac{3^n-1}{2}; d_n=a_n.$

$A^n=\begin{pmatrix}\frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2}\\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2}\end{pmatrix}; f_n(x)=\frac{\left(3^n+1\right)\cdot x+\left(3^n-1\right)}{\left(3^n-1\right)\cdot x+\left(3^n+1\right)}, n\in\mathbb{N}.$

Răspuns: $f_n(x)=\frac{\left(3^n+1\right)\cdot x+\left(3^n-1\right)}{\left(3^n-1\right)\cdot x+\left(3^n+1\right)}, n\in\mathbb{N}^*.$

Problema 4. Să se calculeze limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$x_n=\frac{1}{n\sqrt[p]{n}}\cdot\left(1+\sqrt[p]{2}+\sqrt[p]{3}+...+\sqrt[p]{n}\right), p\in\mathbb{N}^*, p\geq 2.$

Soluţie: Folosind Stolz-Cesaro, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[p]{n+1}}{(n+1)^{1+\frac{1}{p}}-n^{1+\frac{1}{p}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[p]{n+1}}{e^{\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot\ln(n+1)}-e^{\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[p]{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot\ln\frac{n+1}{n}}{e^{\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot\ln n}\cdot\left(e^{\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot\ln\frac{n+1}{n}}-1\right)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot\ln\frac{n+1}{n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[p]{n+1}}{n\cdot\sqrt[p]{n}\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right)\cdot\ln\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[p]{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\cdot\frac{p}{p+1}=\frac{p}{p+1}$$

Răspuns: $\frac{p}{p+1}$